Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA1112)
2^{ndo} Examen Parcial (35 %)
Sept-Dic 2016
Tipo C

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (6 pts.) Hallar el área limitada por las curvas $y = x^2 - 4$ e $y = -x^2 - 2x$.

2. (6 pts.) Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.
   (a) (2 pts.) $f(x) = \ln|x|$ está definido para todo $x \in \mathbb{R}$.
   (b) (2 pts.) $\pi^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln\pi}$
   (c) (2 pts.) $\tanh(x)$ es una función par.

3. (6 pts.) Calcular $f'(1)$ si

$$f(x) = x^{\operatorname{sen}(x^2+e^x)}$$

4. (5 pts.) Resolver la ecuación

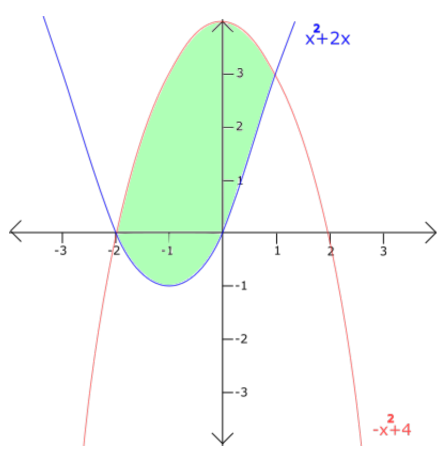
$$\ln(x^2-2) - \ln(x-3) \leq \ln(x-5)$$

5. (12 pts.) Calcular cada una de las siguientes integrales:

(a) (4 pts.) $\displaystyle\int \frac{x\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}dx$ (b) (4 pts.) $\displaystyle\int \tan^3(x)dx$ (c) (4 pts.) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

---

1. **Hallar el área limitada por las curvas $y = x^2 - 4$ e $y = -x^2 - 2x$.**
Graficamos las dos funciones:



Primero encontramos las x donde se intersectan, los cuales serán los límites de integración:

$$\begin{aligned} x^2-4=-x^2-2x &\Rightarrow 2x^2+2x-4=0 \\ &\Rightarrow x^2+x-2=0 \\ &\Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \end{aligned}$$

Entonces $x=-2, x=1$.
Para todo x $\in [-2,1]$, $-x^2-2x \geq x^2-4$, (como se aprecia en el gráfico) por ende tenemos que nuestra integral queda de la forma:

$$\int_{-2}^{1} -x^2-2x-(x^2-4)dx$$

Resolvemos:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{1} \big(-x^2-2x-(x^2-4)\big)dx &= \int_{-2}^{1} (-x^2-2x-x^2+4)dx \\ &= \int_{-2}^{1} (-2x^2-2x+4)dx \\ &= \left(-\frac{2x^3}{3}-x^2+4x\right|_{-2}^{1} \\ &= -\frac{2(1^3)}{3}-1^2+4-\left(-\frac{2(-2)^3}{3}-(-2)^2+4(-2)\right) \\ &= 9 \end{aligned}$$

---

2. **Responda con verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.**
   (a) $f(x)=\ln|x|$ está definido para todo $x\in\mathbb{R}$.

   Recordamos la definición de $\ln|x|$:

   $$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

   $\frac{1}{x}$ está definido para todo x en $\mathbb{R}$, menos en 0. Por ende, $\ln|x|$ no está definido tampoco en 0.
   La respuesta es **falso**.

   (b) $\pi^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\ln\pi}$

   Basandonos en que $\ln x$ es función inversa de e^x, es decir, $e^{\ln x}=x$:

   $$e^{\sqrt{2}\ln\pi} = (e^{\ln\pi})^{\sqrt{2}} = \pi^{\sqrt{2}}$$

   La respuesta es **verdadero**.

   (c) $\tanh(x)$ es una función par.

   Para que una función sea par, $f(x)=f(-x), \forall x \in Dom(f)$, comprobemos entonces si se cumple para $\tanh(x)$:

$$\begin{aligned}
tanh(x) = tanh(-x) &\Rightarrow \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} \\
&\Rightarrow \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{\frac{e^{(-x)} - e^{-(-x)}}{2}}{\frac{e^{(-x)} + e^{-(-x)}}{2}} \\
&\Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} \\
&\Rightarrow e^x - e^{-x} = e^{-x} - e^x \\
&\Rightarrow 2e^x = 2e^{-x} \\
&\Rightarrow x = -x \\
&\Rightarrow x = 0
\end{aligned}$$

Tenemos que $tanh(x) = tanh(-x)$ SÓLO se cumple para $x = 0$, (pues $+0 = -0$), por lo que $\tanh(x)$ no es par.
La respuesta es **falso**.

---

3. **Calcular $f'(1)$ si**

$$f(x) = x^{\sin(x^2+e^x)}$$

Tenemos una función del tipo x^x por lo que debemos implementar derivación logarítmica:

$$y = x^{\sin(x^2+e^x)} \Rightarrow \ln y = \sin(x^2 + e^x) \ln x$$

Aplicamos derivación implícita:

$$\begin{aligned}
&(\ln y)' = (\sin(x^2 + e^x) \ln x)' \\
\Rightarrow &\frac{1}{y} y' = \cos(x^2 + e^x)(2x + e^x) \ln x + \sin(x^2 + e^x) \left(\frac{1}{x}\right) \\
\Rightarrow &y' = y \left(\cos(x^2 + e^x)(2x + e^x) \ln x + \frac{\sin(x^2 + e^x)}{x} \right)
\end{aligned}$$

Como $y = x^{\sin(x^2+e^x)}$:

$$\Rightarrow y' = x^{\sin(x^2+e^x)} \left(\cos(x^2 + e^x)(2x + e^x) \ln x + \frac{\sin(x^2 + e^x)}{x} \right)$$

Entonces, $f'(1)$:

$$\begin{aligned}
f'(1) &= 1^{\sin(1^2+e^1)} \left(\cos(1^2 + e^1)(2(1) + e^1) \ln(1) + \frac{\sin(1^2 + e^1)}{1} \right) \\
&= 1 \left(\cos(1 + e)(2 + e)(0) + \sin(1 + e) \right) \\
&= \sin(1 + e)
\end{aligned}$$

---

4. **Resolver la ecuación**

$$\ln(x^2 - 2) - \ln(x - 3) \leq \ln(x - 5)$$

Debemos hallar el dominio de la inecuación.
Recordamos que $\ln x$ está definido SÓLO para x mayores a 0, entonces:

$$x^2 - 2 > 0 \Rightarrow |x| > \sqrt{2} \Longrightarrow Dom\big(\ln(x^2-2)\big) = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$$
$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \Longrightarrow Dom\big(\ln(x-3)\big) = (3, \infty)$$
$$x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5 \Longrightarrow Dom\big(\ln(x-5)\big) = (5, \infty)$$

Intersectamos los dominios para hallar el dominio de la función:

$$Dom\big(\ln(x-3)\big) \cap Dom\big(\ln(x-5)\big) \cap Dom\big(\ln(x^2-2)\big) = (5, \infty)$$

Ahora debemos hallar los x que satisfagan la ecuación:

$$\begin{aligned} \ln(x^2-2) - \ln(x-3) \leq \ln(x-5) &\Rightarrow \ln\left(\frac{x^2-2}{x-3}\right) - \ln(x-5) \leq 0 \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{x^2-2}{(x-3)(x-5)}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

Podemos aplicar la función e^x a ambos lados de la inecuación. Como la función es continua y estrictamente creciente, la desigualdad se mantiene.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow e^{\ln\left(\frac{x^2-2}{(x-3)(x-5)}\right)} \leq e^0 \\ &\Rightarrow \frac{x^2-2}{x^2-8x+15} \leq 1 \\ &\Rightarrow \frac{x^2-2}{x^2-8x+15} - 1 \leq 0 \\ &\Rightarrow \frac{x^2-2-x^2+8x-15}{x^2-8x+15} \leq 0 \\ &\Rightarrow \frac{8x-17}{x^2-8x+15} \leq 0 \end{aligned}$$

Hallamos las raices para así hacer cementerio de casos:

$$8x - 17 = 0 \Rightarrow x = \frac{17}{8}$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 3, x = 5$$

	$(-\infty, \frac{17}{8}]$	$[\frac{17}{8}, 3)$	$(3,5)$	$(5,\infty)$
$8x-17$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x^2-8x+15$	$+$	$+$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

Entonces la solución para la ecuación es $(-\infty, \frac{17}{8}] \cup (3,5)$
Para hallar el conjunto solución, debemos intersectar el conjunto dominio con el de la solución:

$$\Big((-\infty, \frac{17}{8}] \cup (3,5)\Big) \cap (5, \infty) = \emptyset$$

Entonces tenemos que no hay solución en $\mathbb{R}$ para la ecuación.

---

5. **Calcular cada una de las siguientes integrales:**

(a)

$$\int \frac{x\cos(x)}{\sin^2(x)}dx$$

Integrando por partes:

$$u = x \qquad dv = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$du = dx \qquad v = -\frac{1}{\sin(x)}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x\cos(x)}{\sin^2(x)}dx &= x\left(-\frac{1}{\sin(x)}\right) - \int -\frac{1}{\sin(x)}dx \\ &= -\frac{x}{\sin(x)} + \int \csc(x)dx \\ &= -\frac{x}{\sin(x)} + \ln|\csc(x) - \cot(x)| + C\end{aligned}$$

(b)

$$\int \tan^3(x)dx$$

Reescribimos la integral:

$$\int \tan^3(x)dx = \int \frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)}dx$$

Como tenemos el grado de $\sin(x)$ impar, podemos reordenar la integral de esta manera:

$$= \int \frac{\sin^2(x)\sin(x)}{\cos^3(x)}dx$$

Tomando en cuenta que $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$$= \int \frac{\left(1-\cos^2(x)\right)\sin(x)}{\cos^3(x)}dx$$

$$\begin{aligned}\text{Con } u &= \cos(x) \\ du &= -\sin(x)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\left(1-\cos^2(x)\right)\sin(x)}{\cos^3(x)}dx &= -\int \frac{1-u^2}{u^3}du \\ &= -\int \frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}du \\ &= \frac{1}{2u^2} + \ln|u| + C\end{aligned}$$

Devolvemos el cambio:

$$= \frac{1}{2\cos^2(x)} + \ln|\cos(x)| + C$$

(c)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$$

Buscamos reescribir el denominador, completando cuadrados:

$$\begin{aligned} 4x - x^2 &= 4x - x^2 + 4 - 4 \\ &= -(x^2 - 4x + 4) + 2 \\ &= 4 - (x-2)^2 \end{aligned}$$

Entonces nos queda:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x-2)^2}}$$

Tenemos dos miembros de la forma $a^2 - x^2$, por lo que podemos aplicar cambio trigonométrico:

$$\begin{aligned} x - 2 &= 2\sin(\theta) \\ dx &= 2\cos(\theta)d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x-2)^2}} &= \int \frac{2\cos(\theta)d\theta}{\sqrt{4 - (2\sin(\theta))^2}} \\ &= \int \frac{2\cos(\theta)d\theta}{\sqrt{4 - 4\sin^2(\theta)}} \\ &= \int \frac{2\cos(\theta)d\theta}{\sqrt{4(1 - \sin^2(\theta))}} \\ &= \int \frac{2\cos(\theta)d\theta}{2\cos(\theta)} \\ &= \int d\theta \\ &= \theta + C \end{aligned}$$

Para devolver el cambio, recordamos que $x - 2 = 2\sin(\theta)$, entonces $\theta = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)$

$$\theta + C = \arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

Este material fue digitalizado por Jean Franco Gómez para GUIAS USB.

Jean Franco Gómez
15-10581
Ingeniería de la Computación
Twitter: @JeanFranGo

GECO USB

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb